提醒：本章模块的难度逐渐递增，前三模块主要回顾基础知识与方法，整体难度不高. 但模块五、六、七会涉及诸多颇具难度的方法与题型，请同学们做好心理准备.

模块一 函数的概念与性质

第 1 节 函数概念（★☆）

内容提要

这一节主要涉及求定义域、求解析式、求一类常见的分式型函数的值域这三类问题.

1．求定义域

①偶次方根：如 $\sqrt{f(x)}$，$\sqrt[4]{f(x)}$，$\sqrt[6]{f(x)}$，…，根号下的数非负，即 $f(x)\ge 0$；

②对数：$\log_a f(x)$，真数大于 0，即 $f(x)>0$；

③分式：如 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，分母不为 0，即 $g(x)\ne 0$；

④零次方：x^0 中 $x\ne 0$；

⑤正切：$\tan x$ 中 $x\ne k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$；

⑥抽象函数求定义域：（i）定义域永远指自变量 x 的取值集合；（ii）“$f(\cdots)$”的括号范围恒不变.

2．求解析式常用①换元法，②待定系数法，③方程法.

3．$\dfrac{\text{二次函数}}{\text{一次函数}}$、$\dfrac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$、$\dfrac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$型分式函数求最值：同除法、换元法、判别式法等.

典型例题

类型Ⅰ：求函数的定义域

【例 1】函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\ln(3-x)$ 的定义域为_____.

解析：由 $\begin{cases}2^x-1\ge 0\\ x-2\ne 0\\ 3-x>0\end{cases}$ 解得：$0\le x<3$ 且 $x\ne 2$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)\cup(2,3)$.

答案：$[0,2)\cup(2,3)$

【反思】函数的定义域一定要写成区间或集合的形式.

【变式】若 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,3]$，则函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为_____.

解析：定义域指的是自变量 x 的取值集合，$f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,3]\Rightarrow$ 在 $f(2x+1)$ 中，$0\le x\le 3$，所以 $1\le 2x+1\le 7$，即 $f(2x+1)$ 的括号整体的范围是 $[1,7]$，抽象函数定义域遵循括号范围恒不变原则，所以在 $y=f(x-1)$ 中，$1\le x-1\le 7$，解得：$2\le x\le 8$，故 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[2,8]$.

答案：$[2,8]$

【总结】给出解析式求定义域，根据解析式有意义建立不等式求 x 的范围即可；抽象函数求定义域，抓住两点：①定义域永远指自变量 x 的取值集合，②“$f(\cdots)$”的括号范围恒不变.

类型Ⅱ：几种求函数解析式的题型

【例 2】已知 $f(\sqrt{x}+1)=x-3\sqrt{x}$，则 $f(x)=$_____.

解析：欲求 $f(x)$，可先将 $f(\sqrt{x}+1)$ 括号里的整体换元成 t，求出 $f(t)$，

令 $t=\sqrt{x}+1(t\geq 1)$，则 $x=(t-1)^2$，所以 $f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4(t\geq 1)$，故 $f(x)=x^2-5x+4(x\geq 1)$.

【反思】已知函数 $y=f(g(x))$ 的解析式求 $f(x)$ 的解析式的流程：①令 $t=g(x)$，则 $f(g(x))$ 可化为 $f(t)$，②由 $t=g(x)$ 反解出 x，用 t 表示，代入所给函数 $y=f(g(x))$ 的右侧，从而求得 $f(t)$；③由 $t=g(x)$ 研究 t 的取值范围，得到 $f(t)$ 的定义域；④将 $f(t)$ 的自变量 t 换回成 x，得到 $f(x)$.

答案： $x^2-5x+4(x\geq 1)$

【例 3】已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(f(x))=4x+3$，则 $f(x)=$_____.

解析：已知了函数类型，用待定系数法求解析式，设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，

则 $f(f(x))=af(x)+b=a(ax+b)+b=4x+3$，即 $a^2x+ab+b=4x+3$，

所以 $\begin{cases}a^2=4\\ab+b=3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$，所以 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$.

答案： $2x+1$ 或 $-2x-3$

【反思】已知 $f(x)$ 的函数类型（如一次函数、二次函数、指数函数等）求 $f(x)$ 的解析式，可用待定系数法.

【例 4】已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=2f(-x)+x$，则 $f(x)=$_____.

解析：看到 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 在同一个式子中，将 x 换成 $-x$，再构造一个函数方程，

在 $f(x)=2f(-x)+x$ 中将 x 换成 $-x$ 可得 $f(-x)=2f(x)-x$，所以 $\begin{cases}f(x)=2f(-x)+x & ①\\f(-x)=2f(x)-x & ②\end{cases}$，

将②代入①得：$f(x)=2[2f(x)-x]+x$，整理得：$f(x)=\dfrac{x}{3}$.

答案： $\dfrac{x}{3}$

【反思】类似地，若给出的是 $f(x)$ 与 $f(\dfrac{1}{x})$ 的方程，则可将 x 换成 $\dfrac{1}{x}$ 得到一个新的方程.

类型Ⅲ：一类分式函数的最值问题

【例 5】函数 $y=\dfrac{x^2}{x^2-x+1}(x>0)$ 的最大值为_____.

解析：由题意，$y=\dfrac{x^2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}}\le\dfrac{4}{3}$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，所以 $y_{\max}=\dfrac{4}{3}$.

答案：$\dfrac{4}{3}$

【变式 1】函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}(x>1)$ 的最大值为_____.

解法 1：像这种 $\dfrac{\text{一次函数}}{\text{二次函数}}$ 型的分式函数，可令一次函数部分为 t，再分子分母同除以 t，

令 $t=x-1$，则 $t>0$，$x=t+1$，所以 $y=\dfrac{t}{(t+1)^2-(t+1)+1}=\dfrac{t}{t^2+t+1}=\dfrac{1}{t+\dfrac{1}{t}+1}\le\dfrac{1}{2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}+1}=\dfrac{1}{3}$，

当且仅当 $t=\dfrac{1}{t}$，即 $t=1$ 时取等号，此时 $x=2$，故函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}(x>1)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{3}$.

解法 2：把函数的解析式看成关于 x 的方程，将方程变形，利用判别式研究 y 的最值，

将 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ 变形成 $y(x^2-x+1)=x-1$，整理得：$yx^2-(y+1)x+y+1=0$ ①，

当 $y\ne0$ 时，把①看成关于 x 的一元二次方程，其判别式 $\Delta=[-(y+1)]^2-4(y+1)\ge0$，解得：$-1\le y\le\dfrac{1}{3}$，

要得出 y 的最大值是 $\dfrac{1}{3}$，还需验证等号能成立，可把 $y=\dfrac{1}{3}$ 代回 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ 看能否求出满足题意的 x，

由 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ 可解得：$x=2$，满足 $x>1$，所以函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}(x>1)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{3}$.

答案：$\dfrac{1}{3}$

【变式 2】函数 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}(x>1)$ 的最小值为_____.

解法 1：$\dfrac{\text{二次函数}}{\text{二次函数}}$ 型的分式函数，可以通过拆项把分子化为一次函数，将问题化归成变式 1 的类型，

由题意，$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}=\dfrac{(x^2-x+1)-(x-1)}{x^2-x+1}=1-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$，由上一题结论可得 $y_{\min}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

解法 2：将 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}$ 变形成 $y(x^2-x+1)=x^2-2x+2$，整理得：$(y-1)x^2+(2-y)x+y-2=0$，

当 $y\ne1$ 时，将该方程看成关于 x 的一元二次方程，

其判别式 $\Delta=(2-y)^2-4(y-1)(y-2)\ge0$，解得：$\dfrac{2}{3}\le y\le2(y\ne1)$，

要得出 y 的最小值为 $\dfrac{2}{3}$，还需验证等号能成立，可将 $y=\dfrac{2}{3}$ 代回 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}$ 看能否求出满足题意的 x，

由 $\frac{2}{3}=\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}$ 解得：$x=2$，满足 $x>1$，所以函数 $y=\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}(x>1)$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3}$

【变式 3】函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}$ 的最大值为______.

解析：此处虽不是 $\frac{一次函数}{二次函数}$，但可以把分子的 $\sqrt{x^2+1}$ 看成一次的，故将其换元成 t，

设 $t=\sqrt{x^2+1}$，则 $t\ge 1$，$x^2=t^2-1$，且 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}=\frac{t}{t^2+4}=\frac{1}{t+\frac{4}{t}}\le\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}}=\frac{1}{4}$，

当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$ 时取等号，此时 $x=\pm\sqrt{3}$，所以函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

【总结】 $\frac{一次函数}{二次函数}$、$\frac{二次函数}{一次函数}$ 在处理时，通法都是把一次的部分换元成 t，转化为均值不等式模型求最值，若是 $\frac{二次函数}{二次函数}$，则可通过拆项化为 $\frac{一次函数}{二次函数}$.

强化训练

1．（★）函数 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$ 的定义域为（　　）

（A）$[-2,2]$　　（B）$(-1,2]$　　（C）$(-1,0)\cup(0,2]$　　（D）$(-1,1)\cup(1,2]$

2．（2022·遂宁期末·★★）若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0]$，则 $f(\lg x)$ 的定义域为（　　）

（A）$[10,100]$　　（B）$[1,2]$　　（C）$[1,10]$　　（D）$(0,1]$

3．（2022·临潼一模·★★）已知 $f(x+1)=\ln x^2$，则 $f(x)=$（　　）

（A）$\ln(x+1)^2$　　（B）$2\ln(x+1)$　　（C）$2\ln|x-1|$　　（D）$\ln(x^2-1)$

4．（2022 • 安徽四校联考 • ★★）已知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f(x)=2f(\frac{1}{x})+\ln x$，则 $f(x)=$_____.

5．（★★）函数 $f(x)=2^{x^2-2x}(0\le x\le 3)$ 的值域是_____.

6．（2022 • 辽宁模拟 • ★★）函数 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 的值域为_____.

7．（2022 • 江苏模拟 • ★★）函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+2}$ 的最大值为_____.

8．（2022 • 广西模拟 • ★★★）函数 $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x-1}+1}$ 的最小值为_____.